

◁ Множество $\sigma(0)$ — конус в силу 3.1.3. Помимо того, из тождества $(x, y) = (x, x) + (0, y - x)$ выводим $(x, y) \in \sigma \Leftrightarrow y - x \in \sigma(0)$. ▷

3.2.3. Пусть K — конус в векторном пространстве X . Положим

$$\sigma := \{(x, y) \in X^2 : y - x \in K\}.$$

Тогда σ — предпорядок, согласованный с векторной структурой, причем K совпадает с конусом положительных элементов $\sigma(0)$. Более того, σ является порядком в том и только в том случае, если $K \cap (-K) = 0$.

◁ Ясно, что $0 \in K \Rightarrow I_X \subset \sigma$ и $K + K \subset K \Rightarrow \sigma \circ \sigma \subset \sigma$. Имеем также представление $\sigma^{-1} = \{(x, y) \in X^2 : x - y \in K\}$. Значит, $\sigma \cap \sigma^{-1} \subset I_X \Leftrightarrow K \cap (-K) = 0$. Осталось проверить, что σ — конус. С этой целью возьмем $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \sigma$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1(y_1 - x_1) + \alpha_2(y_2 - x_2) \in \alpha_1 K + \alpha_2 K \subset K$. ▷

3.2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Заданный конус K называют *упорядочивающим* или *острым*, если $K \cap (-K) = 0$.

3.2.5. ЗАМЕЧАНИЕ. На основании 3.2.2 и 3.2.3 задание в векторном пространстве структуры предупорядоченного векторного пространства равносильно выделению в нем конуса положительных элементов. Структуру упорядоченного векторного пространства создают выделением острого конуса. В этой связи о (пред)упорядоченном векторном пространстве X часто говорят как о паре (X, X_+) , где X_+ — конус положительных элементов.

3.2.6. ПРИМЕРЫ.

(1) Пространство функций \mathbb{R}^{Ξ} с конусом $\mathbb{R}_+^{\Xi} := (\mathbb{R}_+)^{\Xi}$ функций, принимающих положительные значения.

(2) Пусть X — упорядоченное векторное пространство с конусом положительных элементов X_+ . Если X_0 — подпространство X , то порядок, индуцируемый в X_0 из X , задан конусом $X_0 \cap X_+$. В этом смысле X_0 рассматривают как упорядоченное векторное пространство.

(3) Пусть X и Y — (пред)упорядоченные векторные пространства. Оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ называют *положительным* (пишут $T \geq 0$), если выполнено $T(X_+) \subset Y_+$. Множество всех положительных операторов образует конус $\mathcal{L}_+(X, Y)$. Линейную оболочку

$\mathcal{L}_+(X, Y)$ обозначают символом $\mathcal{L}_r(X, Y)$. Операторы из $\mathcal{L}_r(X, Y)$ называют *регулярными*.

3.2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Упорядоченное векторное пространство называют *векторной решеткой*, если решеткой является упорядоченное множество векторов рассматриваемого пространства.

3.2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторную решетку называют *пространством Канторовича* или, короче, *K-пространством*, если любое непустое ограниченное сверху множество в ней имеет точную верхнюю границу.

3.2.9. В K-пространстве каждое непустое ограниченное снизу множество имеет точную нижнюю границу.

◁ Пусть $x \leq U$. Тогда $-x \geq -U$. Значит, по 3.2.8 существует $\sup(-U)$. При этом $-x \geq \sup(-U)$. Отсюда очевидно следует, что $-\sup(-U) = \inf U$. ▷

3.2.10. В K-пространстве для непустых ограниченных сверху множеств U и V выполнено

$$\sup(U + V) = \sup U + \sup V.$$

◁ В случае, когда множество U или множество V состоит из одного элемента, требуемое равенство ясно. Общий случай получаем теперь в силу «ассоциативности точных верхних границ». Именно,

$$\begin{aligned} \sup(U + V) &= \sup\{\sup(u + V) : u \in U\} = \\ &= \sup\{u + \sup V : u \in U\} = \sup V + \sup\{u : u \in U\} = \\ &= \sup V + \sup U. \quad \triangleright \end{aligned}$$

3.2.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Вывод предложения 3.2.10 можно считать справедливым в произвольном упорядоченном векторном пространстве при условии, что у исходных множеств имеются точные верхние границы. Аналогично трактуют соотношение: $\sup \lambda U = \lambda \sup U$ для $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

3.2.12. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для элемента x векторной решетки вектор $x_+ := x \vee 0$ называют *положительной частью* x , элемент $x_- := (-x)_+$ — *отрицательной частью*, а $|x| := x \vee (-x)$ — *модулем* x .

3.2.13. В векторной решетке для любых элементов x и y имеет место тождество

$$x + y = x \vee y + x \wedge y.$$

$$\triangleleft x + y - x \wedge y = x + y + (-x) \vee (-y) = y \vee x \triangleright$$

3.2.14. $x = x_+ - x_-$; $|x| = x_+ + x_-$.

\triangleleft Первое равенство получается из 3.2.13 при $y := 0$. Помимо этого, $|x| = x \vee (-x) = -x + (2x) \vee 0 = -x + 2x_+ = (x_+ - x_-) + 2x_+ = x_+ + x_-$. \triangleright

3.2.15. Лемма о сумме промежутков. Для положительных элементов x, y в векторной решетке X будет

$$[0, x + y] = [0, x] + [0, y].$$

(Как обычно, $[u, v] := \sigma(u) \cap \sigma^{-1}(v)$.)

\triangleleft Включение $[0, x] + [0, y] \subset [0, x + y]$ несомненно. Если же $0 \leq z \leq x + y$, то положим $z_1 := z \wedge x$. Видно, что $z_1 \in [0, x]$. Пусть теперь $z_2 := z - z_1$. Тогда $z_2 \geq 0$. При этом $z_2 = z - z \wedge x = z + (-z) \vee (-x) = 0 \vee (z - x) \leq 0 \vee (x + y - x) = 0 \vee y = y$. \triangleright

3.2.16. Теорема Рисса — Канторовича. Пусть X — векторная решетка, а Y — некоторое K -пространство. Пространство регулярных операторов $\mathcal{L}_r(X, Y)$ с конусом $\mathcal{L}_+(X, Y)$ положительных операторов является K -пространством. $\triangleleft \triangleright$

3.3. Продолжение положительных функционалов и операторов

3.3.1. КОНТРИМЕРЫ.

(1) Пусть X — пространство $B([0, 1], \mathbb{R})$ ограниченных вещественных функций на $[0, 1]$, а $X_0 := C([0, 1], \mathbb{R})$ — подпространство X , составленное из непрерывных функций. Положим $Y := X_0$ и наделим X_0, X и Y естественными отношениями порядка (ср. 3.2.6 (1) и 3.2.6 (2)). Рассмотрим задачу о продолжении тождественного оператора $T_0 : X_0 \rightarrow Y$ до положительного оператора $T \in \mathcal{L}_+(X, Y)$. Если бы эта задача имела решение T , то у каждого непустого ограниченного множества \mathcal{E} в X_0 нашлась бы точная верхняя граница $\sup_{X_0} \mathcal{E}$, вычисленная в X_0 . Именно, $\sup_{X_0} \mathcal{E} = T \sup_X \mathcal{E}$, где $\sup_X \mathcal{E}$ — точная верхняя граница \mathcal{E} в X . В то же время нет сомнений, что Y не является K -пространством.