

## Глава 3

### Выпуклый анализ

#### 3.1. Множества в векторных пространствах

**3.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $\Gamma$  — подмножество  $\mathbb{F}^2$ , а  $U$  — подмножество векторного пространства. Множество  $U$  называют  $\Gamma$ -множеством (и пишут  $U \in (\Gamma)$ ), если выполнено

$$(\lambda_1, \lambda_2) \in \Gamma \Rightarrow \lambda_1 U + \lambda_2 U \subset U.$$

#### 3.1.2. ПРИМЕРЫ.

(1) Любое множество входит в  $(\emptyset)$ . (Таким образом,  $(\emptyset)$  не является множеством.)

(2) При  $\Gamma := \mathbb{F}^2$  непустые  $\Gamma$ -множества это в точности линейные подмножества векторных пространств.

(3) Если  $\Gamma := \mathbb{R}^2$ , то непустые  $\Gamma$ -множества в векторном пространстве  $X$  называют *вещественными подпространствами* в  $X$ .

(4) Если  $\Gamma := \mathbb{R}_+^2$ , то непустые  $\Gamma$ -множества называют *конусами*. Иными словами, непустое множество  $K$  является конусом в том и только в том случае, если  $K + K \subset K$  и  $\alpha K \subset K$  при всех  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . Непустые  $\mathbb{R}_+^2 \setminus 0$ -множества (иногда) называют *незаостренными конусами*, а непустые  $\mathbb{R}_+ \times 0$ -множества — *невыпуклыми конусами*. (Здесь и в дальнейшем использовано обычное обозначение  $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ .)

(5) Пусть  $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{F}^2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ . Непустые  $\Gamma$ -множества называют *аффинными многообразиями*. Если  $X_0$

— подпространство в  $X$  и  $x \in X$ , то  $x + X_0 := \{x\} + X_0$  — аффинное многообразие в  $X$ . Наоборот, если  $L$  — аффинное многообразие в  $X$  и  $x \in L$ , то  $L - x := L + \{-x\}$  — линейное множество в  $X$ .  $\triangleleft \triangleright$

(6) Пусть  $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{F}^2 : |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1\}$ . Тогда непустые  $\Gamma$ -множества называют *абсолютно выпуклыми*.

(7) Пусть  $\Gamma := \{(\lambda, 0) \in \mathbb{F}^2 : |\lambda| \leq 1\}$ . Тогда  $\Gamma$ -множества называют *уравновешенными* (при  $\mathbb{F} := \mathbb{R}$  говорят также о *звездных* множествах; используют и термин «симметричное множество», что не вполне оправдано).

(8) Пусть  $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ . Тогда  $\Gamma$ -множества называют *выпуклыми*.

(9) Если  $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\}$ , то непустые  $\Gamma$ -множества называют *коническими отрезками*. Множество является коническим отрезком в том и только в том случае, если оно выпукло и содержит нуль.  $\triangleleft \triangleright$

(10) Для любого  $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$  и произвольного векторного пространства  $X$  над  $\mathbb{F}$  выполнено  $X \in (\Gamma)$ . Отметим еще, что в 3.1.2 (1)–3.1.2 (9) множество  $\Gamma$  является  $\Gamma$ -множеством.

**3.1.3.** Пусть  $X$  — векторное пространство и  $\mathcal{E}$  — некоторое семейство  $\Gamma$ -множеств в этом пространстве  $X$ . Тогда  $\cap\{U : U \in \text{im } \mathcal{E}\} \in (\Gamma)$ . Если, кроме того,  $\text{im } \mathcal{E}$  фильтровано по возрастанию (относительно включения множеств), то  $\cup\{U : U \in \text{im } \mathcal{E}\} \in (\Gamma)$ .  $\triangleleft \triangleright$

**3.1.4.** ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3.1.3, в частности, означает, что совокупность  $\Gamma$ -множеств данного векторного пространства, будучи упорядочена по включению, становится полной решеткой.

**3.1.5.** Пусть  $X$  и  $Y$  — векторные пространства, а  $U \subset X$  и  $V \subset Y$  — некоторые  $\Gamma$ -множества. Тогда  $U \times V \in (\Gamma)$ .

$\triangleleft$  Если одно из множеств  $U$  или  $V$  пусто, то  $U \times V = \emptyset$  и доказывать нечего. Пусть теперь  $u_1, u_2 \in U$  и  $v_1, v_2 \in V$ , а  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Gamma$ . Тогда  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$ , а  $\lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1 \in V$ . Значит,  $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in U \times V$ .  $\triangleright$

**3.1.6.** ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть  $X, Y$  — векторные пространства и  $T \subset X \times Y$  — соответствие. Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$ . Если  $T \in (\Gamma)$ , то  $T$  называют  $\Gamma$ -соответствием.

**3.1.7. ЗАМЕЧАНИЕ.** Если  $\Gamma$ -множества (при фиксированном  $\Gamma$ ) носят специальное название, то это название сохраняют и для  $\Gamma$ -соответствий. В этом смысле говорят о *линейных* и *выпуклых соответствиях*, *аффинных отображениях* и т. п. Уместно подчеркнуть особенность терминологии: выпуклая функция одной переменной не является выпуклым соответствием, за исключением тривиальных случаев (см. 3.4.2).

**3.1.8.** Пусть  $T \subset X \times Y$  — некоторое  $\Gamma_1$ -соответствие, а  $U \subset X$  — некоторое  $\Gamma_2$ -множество. Если  $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ , то  $T(U) \in (\Gamma_2)$ .

◁ Если  $y_1, y_2 \in T(U)$ , то для некоторых  $x_1, x_2 \in U$  будет  $(x_1, y_1) \in T$  и  $(x_2, y_2) \in T$ . Для  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Gamma_2$  имеем  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Gamma_1$  и, значит,  $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) \in T$ . Отсюда следует, что  $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \in T(U)$ . ▷

**3.1.9.** Суперпозиция  $\Gamma$ -соответствий —  $\Gamma$ -соответствие.

◁ Пусть  $F \subset X \times V$  и  $G \subset W \times Y$  и  $F, G \in (\Gamma)$ . Имеем

$$(x_1, y_1) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists v_1) \quad (x_1, v_1) \in F \ \& \ (v_1, y_1) \in G;$$

$$(x_2, y_2) \in G \circ F \Leftrightarrow (\exists v_2) \quad (x_2, v_2) \in F \ \& \ (v_2, y_2) \in G.$$

«Умножая первую строчку на  $\lambda_1$ , вторую — на  $\lambda_2$ , где  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Gamma$ , и складывая результаты», последовательно получаем требуемое. ▷

**3.1.10.** Если  $U, V$  — подмножества  $X$  и  $U, V \in (\Gamma)$  для  $\Gamma \subset \mathbb{F}^2$ , то для любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  выполнено  $\alpha U + \beta V \in (\Gamma)$ .

◁ Следует сослаться на 3.1.5, 3.1.8 и 3.1.9. ▷

**3.1.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $X$  — векторное пространство,  $\Gamma$  — подмножество  $\mathbb{F}^2$  и  $U$  — подмножество  $X$ . Множество

$$H_\Gamma(U) := \cap \{V \subset X : V \in (\Gamma), V \supset U\}$$

называют  $\Gamma$ -оболочкой  $U$ .

**3.1.12.** Справедливы утверждения:

- (1)  $H_\Gamma(U) \in (\Gamma)$ ;
- (2)  $H_\Gamma(U)$  — наименьшее  $\Gamma$ -множество, содержащее  $U$ ;
- (3)  $U_1 \subset U_2 \Rightarrow H_\Gamma(U_1) \subset H_\Gamma(U_2)$ ;
- (4)  $U \in (\Gamma) \Leftrightarrow U = H_\Gamma(U)$ ;
- (5)  $H_\Gamma(H_\Gamma(U)) = H_\Gamma(U)$ . ◁▷

**3.1.13.** Имеет место формула Моцкина:

$$H_{\Gamma}(U) = \cup\{H_{\Gamma}(U_0) : U_0 \subset U, U_0 \text{ — конечное подмножество}\}.$$

◁ Обозначим через  $V$  множество, стоящее в правой части формулы Моцкина. Так как  $U_0 \subset U$ , то, по 3.1.12 (3),  $H_{\Gamma}(U_0) \subset H_{\Gamma}(U)$ , а потому  $H_{\Gamma}(U) \supset V$ . В силу 3.1.12 (2) необходимо (и, разумеется, достаточно) проверить, что  $V \in (\Gamma)$ . Но последнее следует из 3.1.3 и того факта, что  $H_{\Gamma}(U_0) \cup H_{\Gamma}(U_1) \subset H_{\Gamma}(U_0 \cup U_1)$ . ▷

**3.1.14. ЗАМЕЧАНИЕ.** Формула Моцкина показывает, что для описания произвольных  $\Gamma$ -оболочек следует найти лишь  $\Gamma$ -оболочки конечных множеств. Подчеркнем, что при конкретных  $\Gamma$  используют специальные (но естественные) названия для  $\Gamma$ -оболочек. Так, при  $\Gamma := \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+^2 : \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$  говорят о *выпуклых оболочках* и вместо  $H_{\Gamma}(U)$  пишут  $\text{co}(U)$ . Вместо  $H_{\Gamma^2}(U)$  пишут  $\mathcal{L}(U)$  или  $\text{lin}(U)$ , если  $U \neq \emptyset$ , кроме того, полагают для удобства  $\mathcal{L}(\emptyset) := 0$ . Множество  $\mathcal{L}(U)$  называют *линейной оболочкой*  $U$  (и по возможности не путают с *пространством эндоморфизмов*  $\mathcal{L}(X)$  векторного пространства  $X$ ). Аналогично вводят понятия *аффинной оболочки*, *конической оболочки* и т. п. Отметим здесь же, что выпуклая оболочка конечного множества точек составлена из их же *выпуклых комбинаций*, т. е.

$$\text{co}(\{x_1, \dots, x_N\}) = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k x_k : \lambda_k \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_N = 1 \right\}. \quad \triangleleft \triangleright$$

## 3.2. Упорядоченные векторные пространства

**3.2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $(X, \mathbb{R}, +, \cdot)$  — векторное пространство. Пусть, далее,  $\sigma$  — предпорядок в  $X$ . Говорят, что  $\sigma$  *согласован с векторной структурой*, если  $\sigma$  — конус в  $X^2$ . В этом случае пространство  $X$  называют *упорядоченным векторным пространством*. (Точнее говорить о *предупорядоченном векторном пространстве*  $(X, \mathbb{R}, +, \cdot, \sigma)$ , сохраняя термин «упорядоченное векторное пространство» для тех ситуаций, когда  $\sigma$  — это отношение порядка.)

**3.2.2.** Пусть  $X$  — упорядоченное векторное пространство и  $\sigma$  — соответствующий предпорядок. Тогда  $\sigma(0)$  — конус. При этом  $\sigma(x) = x + \sigma(0)$  для всякого  $x \in X$ .